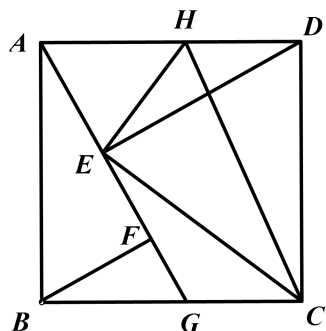


1. 如图，正方形 ABCD，边长为 5. 点 G 是边 BC 上的一点，连接 AG，分别过点 B、点 D 作  $BF \perp AG$  于 F， $DE \perp AG$  于 E. H 是 AD 边上的一点，连接 DE、CH.

(1) 求证： $\triangle ADE \cong \triangle BAF$ ;

(2) 若  $\angle ECH = \angle EDH$ ， $BG = 3$ ，求 DH;

(3) 设  $BG = k$ ， $\triangle DHE$  和  $\triangle DEC$  的面积分别记为  $S_1$  和  $S_2$ ， $\frac{S_1}{S_2}$  有最值吗？若有，请  
求出它的最值.



解：(1) 证明： $\because$  四边形 ABCD 是正方形， $DE \perp AG$ ， $BF \perp AG$

$$\therefore \angle BAD = \angle AED = \angle BFA = 90^\circ$$

$$\therefore \angle BAF + \angle DAE = 90^\circ, \angle ADE + \angle DAE = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle BAF = \angle ADE$$

$$\therefore \begin{cases} \angle BAF = \angle ADE \\ \angle BFA = \angle AED = 90^\circ \\ AB = DA \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle BAF \text{ (AAS)}.$$

(2) 解： $\because \angle ECH = \angle EDH$

$\therefore$  E、C、D、H 四点共圆

$$\therefore \angle ECD + \angle EHD = 180^\circ$$

$$\because \angle EHA + \angle EHD = 180^\circ$$

$$\therefore \angle ECD = \angle EHA$$

$\because$  E、C、D、H 四点共圆

$$\therefore \angle HEC + \angle HDC = 180^\circ$$

$$\therefore \angle HEC = 90^\circ$$

$$\because \angle AED = 90^\circ$$

$$\therefore \angle AEH = \angle DEC$$

$$\text{又} \because \angle ECD = \angle EHA$$

$$\therefore \triangle AEH \sim \triangle DEC$$

$$\therefore \frac{AH}{DC} = \frac{AE}{DE}$$

$$\therefore \frac{AE}{DE} = \tan \angle ADE = \tan \angle BAG = \frac{BG}{AB} = \frac{3}{5}$$

$$\therefore \frac{AH}{5} = \frac{3}{5}, \quad AH=3, \quad DH=5-3=2.$$

(3) 解: 过点 E 作  $EM \perp AD$  于 M,  $EN \perp CD$  于 N.

$$\because BG=k, \text{ 同理 (2) 得 } AH=k$$

$$\therefore DH=5-k$$

$$\because EM \perp AD, EN \perp CD, \angle ADC=90^\circ$$

$\therefore$  四边形 MEND 是矩形

$$\therefore EM=ND$$

$$\therefore \frac{EM}{EN} = \frac{ND}{EN} = \tan \angle DEN = \tan \angle ADE = \tan \angle BAG = \frac{BG}{AB} = \frac{k}{5}$$

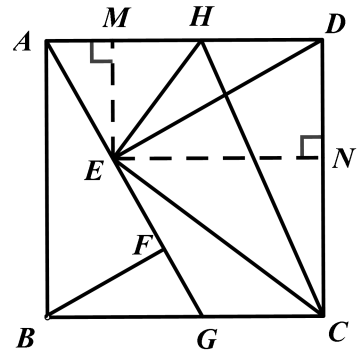
$$\therefore EM = \frac{k}{5} \cdot EN$$

$$\therefore S_1 = \frac{1}{2} \cdot DH \cdot EM = \frac{1}{2} \cdot (5-k) \cdot EM = \frac{1}{2} \cdot (5-k) \cdot \frac{k}{5} \cdot EN$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot DC \cdot EN = \frac{1}{2} \times 5 \cdot EN$$

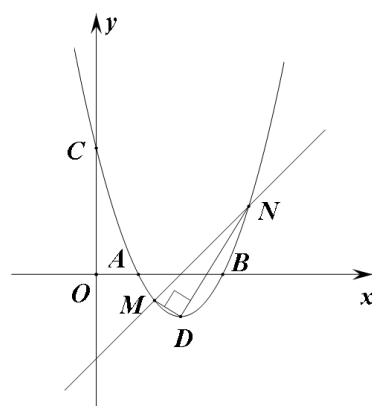
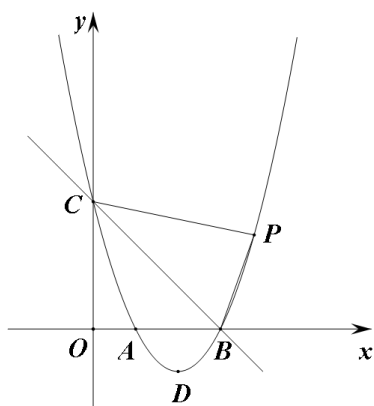
$$\therefore \frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (5-k) \cdot \frac{k}{5} \cdot EN}{\frac{1}{2} \times 5 \cdot EN} = -\frac{1}{25}k^2 + \frac{1}{5}k$$

当  $k = \frac{5}{2}$  时,  $\frac{S_1}{S_2}$  的最大值是  $\frac{1}{4}$ .



2. 如图：已知二次函数  $y=ax^2-4ax+c$  的最小值为-1，且与  $x$  轴相交于 A、B 两点，与  $y$  轴交于点 C，点 C 的坐标为 (0, 3)，抛物线的顶点是 D 点。

- (1) 求顶点 D 的坐标，求该二次函数的解析式；
- (2) 若点 P 是直线 BC 上方抛物线上的一点，有  $S_{\triangle PBC} = 6$ ，求点 P 的坐标；
- (3) 直线  $y=x+b$  与抛物线相交于 M、N 两点，当  $\angle MDN=90^\circ$  时，求 b 的值。



解：(1) 依题意得二次函数对称轴是  $x=-\frac{-4a}{2a}=2$ ,

$\therefore$  二次函数的最小值是-1

$\therefore$  顶点坐标 D (2, -1)

设二次函数的解析式为  $y=a(x-2)^2-1$

将点 C (0, 3) 代入得  $a(0-2)^2-1=3 \quad \therefore a=1$

$\therefore y=(x-2)^2-1$  或  $y=x^2-4x+3$

(2) 方法一：平行转换如图①

过点 P 作  $PE \parallel BC$  交  $y$  轴于 E, 交  $x$  轴于 F, 连接 BE

$$\therefore S_{\triangle PBC} = S_{\triangle EBC}$$

$$\therefore \frac{1}{2} EC \cdot OB = 6$$

$$\therefore \frac{1}{2} EC \cdot 3 = 6$$

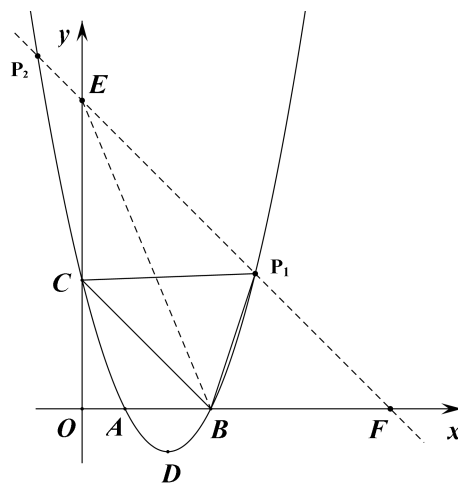
$$\therefore EC = 4, \therefore E(0, 7).$$

令二次函数  $y=x^2-4x+3$  的  $y=0$

则  $x^2-4x+3=0$ , 解得  $x_1=1, x_2=3$

$$\therefore A(1, 0), B(3, 0)$$

设 BC 的解析式为  $y=kx+b$ ,



图①

将  $B(3, 0)$ ,  $C(0, 3)$  代入

得直线  $BC$  的解析式为  $y = -x + 3$ .

设  $PE$  的解析式为  $y = k'x + b'$

$\because PE \parallel BC \quad \therefore k' = k = -1$

将  $E(0, 7)$  代入, 得  $0 + b' = 7$ ,  $\therefore b' = 7$ ,

$\therefore PE$  的解析式为  $y = -x + 7$ .

点  $P$  就是二次函数  $y = x^2 - 4x + 3$  与直线  $PE$  的交点。

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ y = -x + 7 \end{cases}; \text{解得: } \begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 3 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = 8 \end{cases}.$$

$\therefore P_1(4, 3)$ ,  $P_2(-1, 8)$ .

(该方法, 连接  $CF$  亦可)

方法二: 铅锤法

过点  $P$  作  $PH \perp x$  轴于  $H$ , 交直线  $BC$  于  $G$ . 如图②③

设  $P(t, t^2 - 4t + 3)$ , 则  $G(t, -t + 3)$

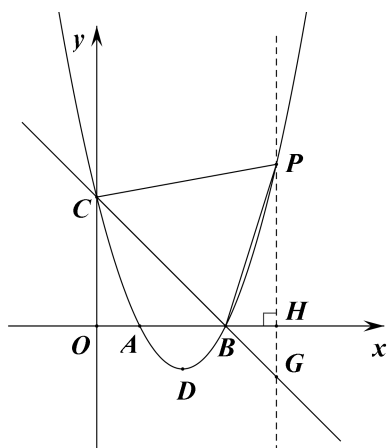
$$S_{\triangle PBC} = \frac{1}{2} \times \text{水平宽} \times \text{铅锤高}$$

$$S_{\triangle PBC} = \frac{1}{2} \times OB \times PG$$

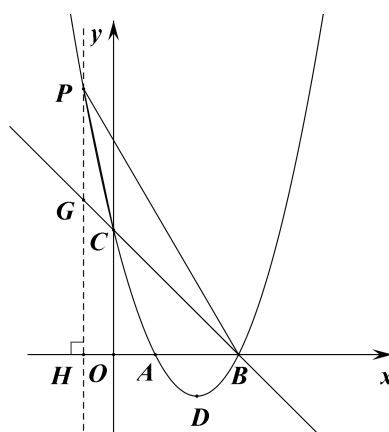
$$6 = \frac{1}{2} \times 3 \cdot [(t^2 - 4t + 3) - (-t + 3)]$$

化简得:  $t^2 - 3t - 4 = 0$ , 解得:  $t_1 = 4$ ,  $t_2 = -1$ .

$\therefore P_1(4, 3)$ ,  $P_2(-1, 8)$



图②



图③

(3) 如图④, 过点  $D$  作直线  $l$  平行于  $x$  轴, 分别过  $M$ 、 $N$  作  $MI \perp l$  于  $I$ ,  $NK \perp l$  于  $K$ .

设  $M(x_1, x_1 + b)$ ,  $N(x_2, x_2 + b)$ , 则  $I(x_1, -1)$ ,  $N(x_2, -1)$ .

∵ M、N 是抛物线  $y=x^2-4x+3$  与直线  $y=x+b$  的交点

$$\therefore \begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ y = x + b \end{cases}$$

∴  $x^2-4x+3=x+b$ , 整理得  $x^2-5x+3-b=0$ .

$$\therefore x_1+x_2=5, \quad x_1 \cdot x_2=3-b$$

易证得  $\triangle MID \sim \triangle DKN$

$$\therefore \frac{MI}{DK} = \frac{DI}{NK}$$

$$\therefore \frac{x_1+b+1}{x_2-2} = \frac{2-x_1}{x_2+b+1}$$

$$\text{令 } b+1=c, \text{ 得 } \frac{x_1+c}{x_2-2} = \frac{2-x_1}{x_2+c}$$

$$\text{整理得: } 2x_1x_2 + (c-2)(x_1+x_2) + c^2+4=0$$

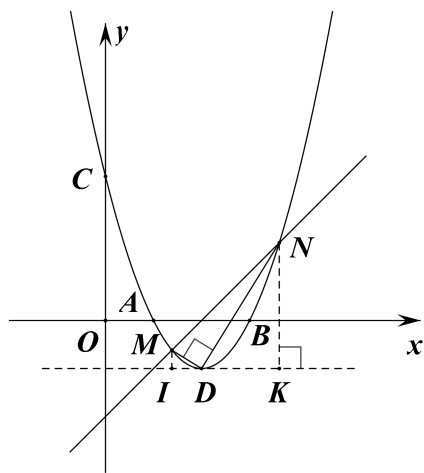
$$\text{将 } x_1+x_2=5, \quad x_1 \cdot x_2=3-b \text{ 代入 } 2 \times (3-b) + (c-2) \times 5 + c^2+4=0$$

$$\text{再将 } b=c-1 \text{ 代入 } 2 \times (3-c+1) + (c-2) \times 5 + c^2+4=0$$

$$\text{整理得: } c^2+3c+2=0, \text{ 解得: } c_1=-1, \quad c_2=-2,$$

$$\text{则 } b_1=-2, \quad b_2=-3 \text{ (舍去, 此时 M 与 D 重合)}$$

$$\therefore b=-2.$$



图④